Probabilità

Esercizio 1

Siano A e B due eventi tali che $P(A \cap \overline{B}) = 0.1$ e $P(\overline{A}) = 0.4$.

(a) Si tratta di due eventi incompatibili?

(b) Supposto che A e B siano indipendenti si calcoli $P(A \cup B)$;

(c) si individui il valore di $P(B)$ che assicura che sia $P(A \mid B) = 5/7$.

Soluzione

(a) Dalle informazioni fornite si deduce in modo immediato che:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A - B) = 0.1, \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0.6,$$

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = 0.5 \neq 0$$

quindi A e B sono compatibili.

(b) Se A e B sono indipendenti allora $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ da cui segue che:

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.5}{0.6} = \frac{5}{6} = 0.8333$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cap \overline{B}) + P(B) = 0.1 + 0.8333 = 0.9333.$$

(c) Osservando che:

$$P(A \mid B) = \frac{5}{7} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.5}{P(B)}$$

si può concludere che:

$$P(B) = 0.5\,\frac{7}{5} = 0.7.$$

Esercizio 2

Si supponga di lanciare 7 volte una moneta regolare. Si calcoli la probabilità che Croce non compaia mai due volte di seguito.

Soluzione

Casi possibili: $2^7 = 128$

Casi favorevoli: se al lancio precedente si è avuta Testa sono favorevoli sia Testa sia Croce, se al lancio precedente si è avuta Croce è favorevole solo l'esito Testa. Quindi la successione dei casi favorevoli può essere così schematizzata:

	1° lancio	2° lancio	3° lancio	4° lancio	5° lancio	6° lancio	7° lancio
T	1	2	3	5	8	13	21
C	1	1	2	3	5	8	13
Casi fav.	2	3	5	8	13	21	34

$$P(\text{Croce non compaia mai due volte di seguito}) = \frac{34}{128} = 0.265625.$$

Esercizio 3

Si supponga di estrarre con reinserimento un certo numero di palline da una delle 2 urne U_1 e U_2 scelta a caso. Sapendo che l'urna U_1 contiene solo palline verdi e che l'urna U_2 contiene 3 palline verdi e 6 blu, si calcoli la probabilità dei seguenti eventi:

(a) la prima pallina estratta è verde;

(b) la prima pallina estratta è verde e la seconda blu;

(c) sapendo che si sono estratte k palline verdi, la probabilità che l'estrazione sia avvenuta dall'urna U_1.

Soluzione

(a) Fatte le seguenti posizioni: V = "pallina verde", B = "pallina blu", U_1 = "prima urna", U_2 = "seconda urna", si ha:

$$P(V) = P(V \mid U_1)P(U_1) + P(V \mid U_2)P(U_2) = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

(b) Viene richiesta la probabilità dell'evento $(V_1 \cap B_2)$. Si noti che occorre condizionare l'evento intersezione e, come emergerà, i due eventi non risultano essere indipendenti:

$$P(V_1 \cap B_2) = P(V_1 \cap B_2 \mid U_1)P(U_1) + P(V_1 \cap B_2 \mid U_2)P(U_2) =$$

$$= 0 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9} \neq \frac{2}{9} = P(V_1)P(B_2).$$

(c)

$$P(U_1 \mid k \text{ verdi}) = \frac{P(k \text{ verdi} \cap U_1)}{P(k \text{ verdi})} = \frac{P(k \text{ verdi} \mid U_1)P(U_1)}{P(k \text{ verdi} \mid U_1)P(U_1) + P(k \text{ verdi} \mid U_2)P(U_2)} =$$

$$= 1 \times \frac{1/2}{1 \times 1/2 + (1/3)^k \times 1/2} = \frac{3^k}{3^k + 1}.$$

Esercizio 4

Nella città A il 30% degli abitanti è vegetariano, il 20% dei vegetariani è obeso mentre il 45% degli abitanti è non vegetariano ed obeso.

Estratto a caso un abitante si calcoli la probabilità che:

(a) sia obeso;

(b) sia vegetariano sapendo che non è obeso

Soluzione

(a) Fatte le seguenti posizioni: V = "vegetariano", O = "obeso", è noto che:

$$P(V) = 0.3, \quad P(\overline{V}) = 0.7, \quad P(O \mid V) = 0.2, \quad P(\overline{V} \cap O) = 0.45.$$

Ne consegue che:

$$P(O) = P(O \cap V) + P(O \cap \overline{V}) = P(O \mid V)P(V) + P(O \cap \overline{V}) =$$

$$= (0.2)(0.3) + 0.45 = 0.51.$$

(b)

$$P(V \mid \overline{O}) = \frac{P(V \cap \overline{O})}{P(\overline{O})} = \frac{P(\overline{O} \mid V)P(V)}{P(\overline{O})} = \frac{(0.8)(0.3)}{(0.49)} = 0.4898.$$

Esercizio 5

In una popolazione P le frequenze relative dei 4 gruppi sanguigni 0, A, B e AB sono pari a p_0, p_A, p_B e P_{AB}. E' noto che, ai fini della trasfusione di sangue: 0 può ricevere solo da

0, A può ricevere da A o da 0, B può ricevere da B o da 0 e AB può ricevere da qualunque gruppo.

Estratti a caso e in modo indipendente un donatore e un ricevente si calcoli la probabilità che:

(a) la trasfusione sia possibile;

(b) il ricevente sia del gruppo AB sapendo che la trasfusione è possibile.

Soluzione

(a) Indicate le probabilità dei differenti gruppi sanguigni nel seguente modo $P(AB) = p_{AB}$, $P(A) = p_A$, $P(B) = p_B$ e $P(0) = p_0$ la probabilità che il ricevente sia compatibile col donatore risulta:

$$\begin{gathered}
P[(\text{ricevente } 0 \text{ o } A \text{ o } B \text{ o } AB) \cap (\text{donatore } 0)]+ \\
+P[(\text{ricevente } A \text{ o } AB) \cap (\text{donatore } A)]+ \\
+P[(\text{ricevente } B \text{ o } AB) \cap (\text{donatore } B)]+ \\
+P[(\text{ricevente } AB) \cap (\text{donatore } AB)] = \\
= P(0 \text{ o } A \text{ o } B \text{ o } AB)P(0) + P(A \text{ o } AB)P(A) + P(B \text{ o } AB)P(B) + P(AB)P(AB) = \\
= p_0 + (p_A + p_{AB})p_A + (p_B + p_{AB})p_B + p_{AB}^2.
\end{gathered}$$

(b) Ricordando che se il ricevente è del gruppo AB allora il donatore può avere un qualunque gruppo, si ha:

$$\begin{gathered}
P(\text{ricevente } AB \mid \text{ricevente compatibile col donatore}) = \\
= \frac{P(\text{ricevente } AB \cap \text{ricevente compatibile col donatore})}{P(\text{ricevente compatibile col donatore})} = \\
= \frac{p_{AB}}{p_0 + (p_A + p_{AB})p_A + (p_B + p_{AB})p_B + p_{AB}^2}.
\end{gathered}$$

Esercizio 6

Le due urne U_1 e U_2 contengono palline gialle e verdi. La proporzione di palline gialle in ciascuna delle due urne è pari a θ_1 per U_1 e a θ_2 per U_2. Supposto di effettuare in modo indipendente n estrazioni con reinserimento da ciascuna delle due urne:

(a) si calcoli la probabilità che il numero di palline gialle estratte dalle due urne sia diverso;
(b) supposto che sia $n = 1$ si individui almeno una coppia di valori di θ_1 e θ_2 per i quali la probabilità che il numero di palline gialle estratte dalle due urne sia diverso coincide con la probabilità dell'evento complementare.

Soluzione

(a) Fatte le seguenti posizioni: G= pallina gialla, $P(G \mid U_1) = \theta_1$, $P(G \mid U_2) = \theta_2$
$X_1 =$ "numero di G da U_1 in n prove indipendenti" $\sim$Bi(n, θ_1);
$X_2 =$ "numero di G da U_2 in n prove indipendenti" $\sim$Bi(n, θ_2).
ed osservando che le variabili casuali X_1 e X_2 sono indipendenti, si ha:

$$P(X_1 \neq X_2) = 1 - P(X_1 = X_2) = 1 - \sum_{i=0}^{n} P(X_1 = i)P(X_2 = i) =$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \theta_1^i (1-\theta_1)^{n-i} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \theta_2^i (1-\theta_2)^{n-i}.$$

(b) Se $n = 1$ allora:

$$P(X_1 \neq X_2) = 1 - [(1-\theta_1)(1-\theta_2) + \theta_1\theta_2]$$

$$P(X_1 = X_2) = [(1-\theta_1)(1-\theta_2) + \theta_1\theta_2]$$

quindi si ha l'uguaglianza se:

$$\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_1\theta_2 = 1 - \theta_1 - \theta_2 + 2\theta_1\theta_2$$

$$2\theta_1 + 2\theta_2 - 4\theta_1\theta_2 - 1 = 0.$$

Ad esempio: $(\theta_1 = 1/3, \theta_2 = 1/2)$.

Esercizio 7

Una fabbrica produce componenti elettronici tramite due linee di produzione. Sapendo che la linea 1 produce il 40% dei componenti, che il 15% di questi è difettoso mentre il 10% dei componenti prodotti dalla linea 2 è difettoso:
(a) si calcoli la probabilità che un componente scelto a caso sia difettoso;

(b) sapendo che il componente estratto è difettoso, si calcoli la probabilità che sia stato prodotto dalla linea 2;
(c) come dovrebbe cambiare la percentuale di componenti prodotti dalla linea 2 affinché la probabilità calcolata al punto (b) risulti 0.6?

Soluzione

(a) Indicati con L_1 la prima linea, con L_2 la seconda linea e con D il componente difettoso, è noto che:

$$P(L_1) = 0.4, \quad P(L_2) = 0.6, \quad P(D \mid L_1) = 0.15, \quad P(D \mid L_2) = 0.1$$

pertanto la probabilità che un componente scelto a caso sia difettoso risulta:

$$P(D) = P(D \mid L_1)P(L_1) + P(D \mid L_2)P(L_2) = (0.15)(0.4) + (0.1)(0.6) = 0.12.$$

(b)

$$P(L_2 \mid D) = \frac{P(D \mid L_2)P(L_2)}{P(D)} = \frac{(0.1)(0.6)}{0.12} = 0.5.$$

(c) Fatte le seguenti posizioni: $P(L_2) = x$ e $P(L_1) = 1 - x$ si ha che:

$$0.6 = P(L_2 \mid D) = \frac{P(D \mid L_2)x}{P(D \mid L_1)(1-x) + P(D \mid L_2)x}$$

e sostituendo i valori noti si ottiene:

$$0.6 = \frac{(0.1)x}{(0.15)(1-x) + (0.1)x}$$

ovvero:

$$x = \frac{(0.6)(0.15)}{0.1 + (0.6)(0.05)} = 0.6923.$$

Esercizio 8

In una popolazione il 9% degli individui ha la malattia A, il 60% di coloro che hanno la malattia A hanno anche la malattia B, mentre il 75% di coloro che non hanno A non hanno neppure B. Qual è la probabilità che un individuo scelto casualmente:

(a) non abbia la malattia B?

(b) Abbia la malattia A sapendo che ha la malattia B?

Soluzione

E' noto che:

$$P(A) = 0.09, \quad P(B \mid A) = 0.6, \quad P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0.75.$$

(a)

$$P(\overline{B}) = P(\overline{B} \mid A)P(A) + P(\overline{B} \mid \overline{A})P(\overline{A}) = (1 - 0.6)0.09 + 0.75(1 - 0.09) = 0.7185.$$

(b)

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A)P(A)}{1 - P(\overline{B})} = \frac{(0.6)(0.09)}{1 - 0.7185} = 0.1918.$$

Esercizio 9

Da un mazzo di 52 carte se ne estraggono 4 senza reimmissione. Determinare la probabilità di ottenere:

(a) un asso, una figura e due sette;

(b) un asso alla seconda estrazione;

(c) un sette alla prima estrazione sapendo che si è ottenuto un asso alla seconda.

Soluzione

(a) Fatte le seguenti posizioni: A_i = "Asso alla i-esima estrazione", F_i = "Figura alla i-esima estrazione" e 7_i = "7 alla i-esima estrazione" risulta:

$$P(\text{un Asso, una Figura, due 7 in un ordine qualunque}) =$$

$$= \frac{4!}{2!} P(A_1)P(F_2 \mid A_1)P(7_3 \mid (A_1 \cap F_2)P(7_4 \mid (A_1 \cap F_2 \cap 7_3) =$$

$$= 12 \times \frac{4}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{4}{50} \times \frac{3}{49} = 0.001064.$$

(b) La probabilità di una Asso alla seconda estrazione dipende dall'esito della prima estrazione:

$$P(A_2) = P(A_2 \mid A_1)P(A_1) + P(A_2 \mid \overline{A}_1)P(\overline{A}_1) = \frac{3}{51} \times \frac{4}{52} + \frac{4}{51} \times \frac{48}{52} = 0.076923.$$

(c)

$$P(7_1 \mid A_2) = \frac{P(A_2 \mid 7_1)P(7_1)}{P(A_2)} = \frac{\frac{4}{51} \times \frac{4}{52}}{\frac{3}{51} \times \frac{4}{52} + \frac{4}{51} \times \frac{48}{52}} = \frac{4}{51} = 0.07843.$$

Esercizio 10

Siano A e B due eventi aventi probabilità 0.7 e, rispettivamente, 0.4. Si dica, motivando la risposta, quali fra le seguenti affermazioni sono senz'altro false:

(a) $P(A \cap B) = 0.5$;

(b) $P(A \cap B) = 0.05$;

(c) $P(A \cap B) = 0.35$.

Soluzione

Si osservi che $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$ quindi per la monotonia

$$P(A \cap B) \leq P(A) = 0.7, \quad P(A \cap B) \leq P(B) = 0.4$$

inoltre $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1.1 - P(A \cap B) \leq 1$ da cui segue che:

$$P(A \cap B) \geq 1.1 - 1 = 0.1$$

e in generale risulta:

$$\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \leq P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$$

pertanto possono trarsi le seguenti conlusioni:

(a) falsa;

(b) falsa;

(c) potrebbe essere vera.

Esercizio 11

Sia $\mathcal{E}$ l'esperimento casuale che consiste nel lancio di due dadi regolari. Definiti gli eventi $A =$ "la somma dei punteggi dei due dadi è pari a 5", $B =$ "il primo dado fornisce un numero dispari" e $C =$ "il secondo dado fornisce un numero maggiore di 3" si verifichi se i tre eventi considerati sono o meno indipendenti.

Soluzione

Lo spazio Ω degli eventi elementari è costituito dalle 36 coppie di numeri naturali $\{i, j\}$ $i, j = 1, \ldots, 6$ che risultano essere equiprobabili. Pertanto facendo ricorso alla definizione classica di probabilità risulta:

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, \quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

malgrado la probabilità dell'intersezione dei tre eventi fattorizzi nel prodotto delle probabilità dei singoli eventi avendosi:

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{1, 4\}) = \frac{1}{36} = \frac{1}{9}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = P(A)P(B)P(C)$$

non altrettanto può dirsi per la probabilità dell'intersezione a coppie dei tre eventi, ad esempio risulta:

$$P(A \cap C) = P(\{1, 4\}) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{9}\,\frac{1}{2} = P(A)P(C)$$

pertanto i 3 eventi non sono indipendenti.

Esercizio 12

Due amiche si recano al supermercato. E' noto che la probabilità che la prima acquisti saponette è 0.6, che la seconda acquisti saponette è 0.8 e che entrambe acquistino saponette è 0.5. Sapendo che all'uscita dal supermercato almeno una ha acquistato saponette, determinare la probabilità che la prima abbia acquistato saponette.

Soluzione

Indicato con E_1 l'evento "la prima amica acquista saponette" e con E_2 l'evento "la seconda amica acquista saponette" è noto che:

$$P(E_1) = 0.6, \quad P(E_2) = 0.8, \quad P(E_1 \cap E_2) = 0.5,$$

di conseguenza la probabilità dell'unione risulta:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9,$$

e la probabilità richiesta assume la forma:

$$P[E_1 \mid (E_1 \cup E_2)] = \frac{P[E_1 \cap (E_1 \cup E_2)]}{P(E_1 \cup E_2)} = \frac{P(E_1)}{P(E_1 \cup E_2)} = \frac{0.6}{0.9} = 0.6667.$$

Esercizio 13

Dati 2 eventi A e B stocasticamente indipendenti si verifichi se gli eventi complementari $\overline{A}$ e $\overline{B}$ sono fra loro indipendenti.

Soluzione

Per l'ipotesi di indipendenza tra A e B risulta:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

e sfruttando tale ipotesi unitamente alle leggi di De Morgan si può scrivere:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(\overline{A})P(\overline{B}),$$

pertanto anche $\overline{A}$ e $\overline{B}$ sono indipendenti.

Esercizio 14

Siano A, B e C tre eventi. Sapendo che $P(A) = P(B) = 0.3$, $P(C) = 0.2$, $P(B \cap C) = 0.01$, A e B sono indipendenti e A e C sono incompatibili, si calcolino le seguenti probabilità:

(1) $P(A \mid C)$,

(2) $P(A \cap B \mid C)$,

(3) $P(A \cap \overline{B})$,

(4) $P(A \cup B \cup C)$.

Soluzione

(a) Applicando la definizione di probabilità condizionata si ottiene:

$$P(A \mid C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = 0.$$

(b) Tenendo presente il risultato ottenuto al punto (a) si ha:

$$P[(A \cap B) \mid C] < P(A \mid C) = 0 \quad \rightarrow \quad P[(A \cap B) \mid C] = 0.$$

(c) Poiché A e B sono indipendenti altrettanto può dirsi per A e $\overline{B}$:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = (0.3)(0.7) = 0.21.$$

(d) Ricordando che $P(A \cap C) = P(A \cap B \cap C) = 0$ risulta:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) =$$

$$= 0.3 + 0.3 + 0.2 - 0.3^2 - 0.01 = 0.7.$$

Esercizio 15

Con riferimento ai due eventi E_1 ed E_2 è noto che $P(E_1) = 0.6$, $P(E_2 \mid E_1) = \theta$ e $P(E_2 \mid \overline{E}_1) = 4\theta^2$, $(0 \leq \theta \leq 1/2)$.

(a) Per quale o quali valori di θ si ha $P(E_1 \mid E_2) = 0.5$?

(b) Per quale o quali valori di θ i due eventi E_1 ed E_2 sono incompatibili?

Soluzione

(a) A partire dalle informazioni fornite è possibile impostare la seguente equazione nell'incognita θ:

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_2 \mid E_1)P(E_1)}{P(E_2 \mid E_1)P(E_1) + P(E_2 \mid \overline{E}_1)P(\overline{E}_1)} = \frac{0.6\,\theta}{0.6\,\theta + (0.4)\,4\,\theta^2} = 0.5$$

risolvendo la quale si ottiene:

$$\theta = \frac{1.2 - 0.6}{1.6} = 0.375.$$

(b) I due eventi sono incompatibili se:

$$P(E_1 \cap E_2) = 0.6\,\theta = 0$$

ovvero per $\theta = 0$.